

On se placera en régime sinusoïdal établi dans l'ARQS.
On cherchera à utiliser de préférence les associations d'impédances, les montages en pont diviseurs.

Exercices d'application : Circuit bouchon, filtre RC chargé, équation différentielle

Culture en sciences physiques : filtre chargé, construction de filtres, opération mathématique, analyse spectrale, filtrage et spectre

Corrigés en TD : filtre chargé, construction, bouchon, opération mathématique, analyse spectrale

Exercice 1 : Filtre RC chargé

On considère le filtre RC passe-bas vu en cours. La résistance R est variable et la capacité vaut $C = 10\text{ nF}$.

- Tracer son diagramme de Bode (on notera $\omega_c = \frac{1}{RC}$).
- On choisit $R = 3\text{ k}\Omega$. Déterminer la bande passante à -3 dB du filtre.
- Ce filtre est chargé par une résistance R_c branchée aux bornes du condensateur, modélisant l'utilisation d'un filtre passe-bas RC en sortie non-ouverte.
 - Quel est l'effet de cette charge sur le gain maximal, sur la bande passante du filtre et sur le produit gain maximal \times bande passante ?
 - On choisit $R_c = 2R = 6\text{ k}\Omega$. Déterminer le gain maximal (en dB) et la bande passante à -3 dB de ce filtre chargé.

Exercice 2 : Construction de filtres

- Construire un filtre passe-bas d'ordre 1 de fréquence de coupure $f_c = 1,5\text{ kHz}$ et d'impédance d'entrée $1\text{ k}\Omega$ en bande passante, à l'aide d'une résistance et d'une bobine.
 - Tracer son diagramme de Bode asymptotique.
- Mêmes questions pour un filtre passe-bande d'ordre 2 réalisé avec un condensateur, une bobine et un résistor, de bande passante à -3 dB [20Hz, 20 kHz] et d'impédance d'entrée à résonance de $1\text{ k}\Omega$.

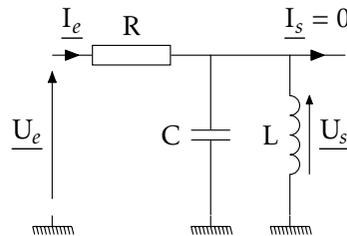
Exercice 3 : Circuit bouchon

On utilise un circuit RLC en filtre comme indiqué sur la figure ci-contre. La sortie est ouverte.

- Déterminer sans calculs les régimes asymptotiques de ce quadripôle. En déduire la nature du filtre qu'il réalise.
- Déterminer sa fonction de transfert. On la mettra sous la forme :

$$H = \frac{1}{1 + jQ(u - 1/u)},$$

en utilisant la pulsation réduite $u = \omega/\omega_0$, après avoir introduit une pulsation caractéristique ω_0 et un facteur de qualité Q .

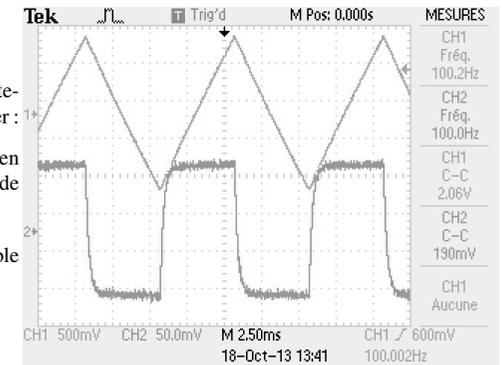


- Déterminer les pulsations de coupure ω_{c1} et ω_{c2} à -3 dB et la bande passante $\omega_{c2} - \omega_{c1}$.
 - Déterminer les équations des asymptotes (on utilisera $x = \log y$) et tracer le diagramme de Bode pour $Q = 5$ et $Q = \frac{1}{2}$. On calculera en particulier la valeur du gain en dB à la pulsation ω_0 .
 - Comment choisir Q pour que ce filtre ne transmette que les fréquences proches de ω_0 ? Comparer la variation de Q avec R au cas du passe-bande du RLC série.

Exercice 4 : Opération mathématique

Proposer un quadripôle permettant de réaliser l'opération représentée sur la figure ci-dessous. L'entrée est sur la voie 1 (CH1), la sortie sur la voie 2 (CH2). On précisera la nature de l'opération mathématique réalisée et on justifiera que la filtre choisi non seulement réalise l'opération voulue mais donne aussi l'amplitude du signal de sortie.

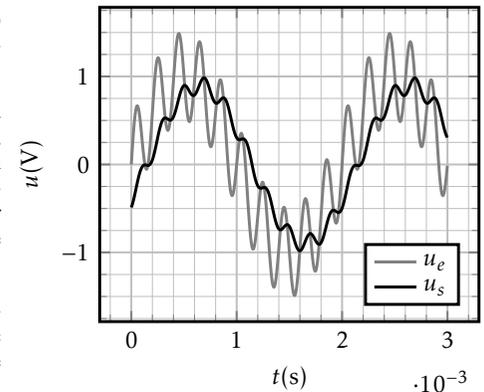
- On présente sur la figure ci-dessous l'entrée et la sortie du filtrage réalisé par un quadripôle.
- Quelle est l'opération mathématique réalisée ? Quel quadripôle passif permet de la réaliser ? Donner en particulier la relation entre la tension de sortie $u_s(t)$ et la tension d'entrée $u_e(t)$.



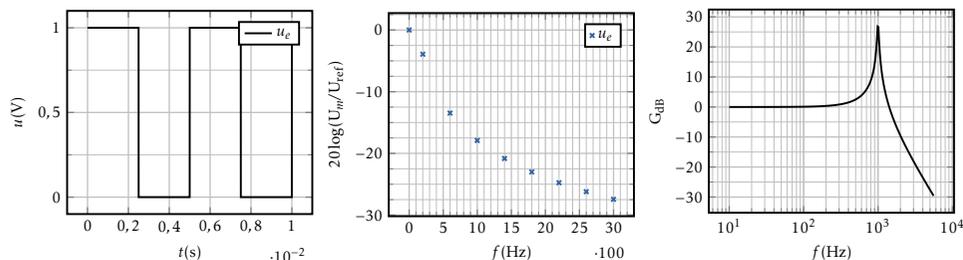
- Proposer des valeurs des composants permettant d'obtenir le comportement observé. On vérifiera en particulier :
 - que la fréquence du signal d'entrée se trouve bien dans le bon domaine par rapport à la pulsation de coupure du filtre,
 - que l'amplitude du signal de sortie est compatible avec la pente du signal d'entrée.

Exercice 5 : Analyse spectrale

- On envoie le signal périodique représenté ci-contre (u_e) sur un filtre du premier ordre. On y a représenté également la sortie du filtre u_s .
 - Interpréter ces signaux comme une somme de deux sinusoïdes dont on précisera les amplitudes A_1 et A_2 , les fréquences f_1 et f_2 et les phases φ_1 et φ_2 . En déduire l'allure de son spectre de Fourier. On utilisera une représentation semi-logarithmique pour représenter $20\log(A_i)$ en fonction de la fréquence (comme sur la figure 1b).
 - Identifier la nature du filtre et déterminer sa pulsation de coupure. Vérifier également l'accord avec les déphasages observés entre les composantes de l'entrée et de la sortie.



2. On envoie un signal créneau (voir la figure 1a) sur un filtre dont le gain en dB est représenté sur la figure 1c. Le spectre de Fourier du signal d'entrée u_e est représenté sur la figure 1b. On a arbitrairement traduit l'axe des ordonnées pour que la composante prépondérante ait une valeur nulle en dB et on a éliminé du spectre les composantes de poids négligeable.



(a) Signal d'entrée : évolution temporelle. (b) Signal d'entrée : spectre de Fourier. (c) Diagramme de Bode du filtre.

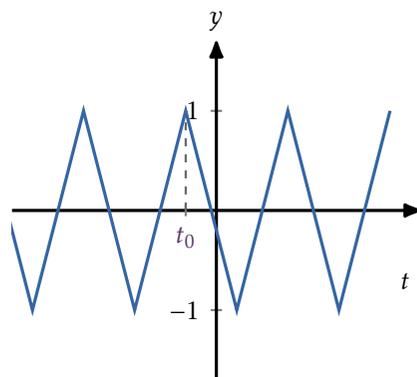
FIG. 1 : Filtrage d'un signal créneau.

- Identifier et justifier les valeurs des fréquences des composantes de Fourier. Que représente la composante de fréquence nulle ?
- Utiliser le diagramme de Bode pour déterminer le spectre de Fourier du signal de sortie du filtre. En déduire l'allure de son évolution.

Exercice 6 : Conception d'un filtre

On donne ci-dessous la décomposition en série de Fourier d'une fonction triangle ayant l'allure représentée ci-contre :

$$y(t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi t}{\tau}\right)$$



- Déterminer une valeur de l'instant t_0 défini sur la courbe, i_e un instant où le signal est maximal.
 - Déterminer l'expression de la période ν de $y(t)$ en fonction de la constante τ .
- Déterminer le spectre de $y(t)$.

- on mettra l'expression sous la forme :

$$y(t) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \cos(2\pi\nu p t + \varphi_p)$$

- en précisant les expressions des constantes a_p (qu'on choisira positive) et $\varphi_p \forall p$ et de la fréquence ν ,
- on tracera l'allure de a_p/a_1 en fonction de la fréquence f pour $\nu = 400\text{Hz}$.

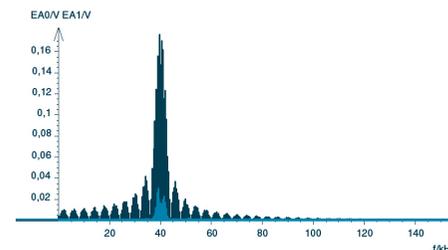
3. On filtre le signal $y(t)$ par un passe bas d'ordre 1, de gain en bande passante de 2 et de fréquence de coupure 1,00kHz.

- Déterminer l'amplitude et la phase des 3 premières composantes de Fourier non nulles du signal filtré.
- En déduire son allure (utiliser une calculatrice, ou python ou Wolfram Alpha™...)

4. On souhaite désormais extraire la cinquième harmonique de $y(t)$, de telle sorte que l'amplitude des autres composantes ne dépasse pas 1% de l'amplitude de la composante extraite. Proposer un filtre, en précisant les caractéristiques nécessaires : fréquence caractéristique, facteur de qualité.

Exercice 7 : Filtrage et spectre

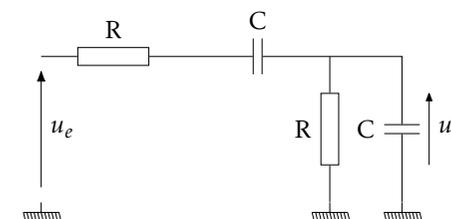
La figure ci-contre représente les spectres de Fourier du signal de commande envoyé par un générateur basse fréquence (GBF) à un émetteur d'ultrasons (grande amplitude, gris foncé) et de celui recueilli par un récepteur placé quelques dizaines de centimètre plus loin (faible amplitude, gris clair).



- Quelle est la nature du filtrage réalisé entre le signal du GBF et sa réception ?
- Donner sa fréquence caractéristique et estimer la finesse du filtre. En déduire le facteur de qualité en admettant qu'il s'agit d'un passe-bande d'ordre 2.
- Identifier les différentes étapes de transformation/propagation du signal. À votre avis, où se produit le filtrage observé ?

Exercice 8 : Impédance complexe et équation différentielle

Établir, en utilisant les impédances complexes, l'équation différentielle reliant la tension $u_s(t)$ à la tension $u_e(t)$ dans le circuit de Wien ci-contre.



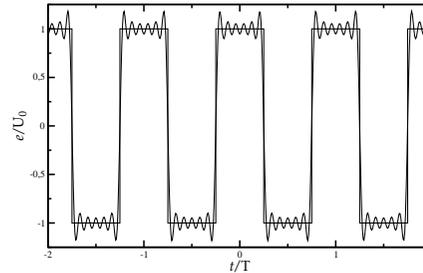
Exercice 9 : Caractère pseudo-intégrateur d'un passe-bas d'ordre 1

On étudie la réponse d'un filtre passif passe-bas d'ordre 1 (le circuit RC vu en cours) à un signal créneau. L'entrée $e(t)$ du filtre est un signal de période $T = 2\pi/\omega$ défini sur une période par :

$$\begin{cases} e(t) = +U_0 & \text{pour } t \in [-T/4, T/4] \\ e(t) = -U_0 & \text{pour } t \in [T/4, 3T/4] \end{cases}$$

On donne à titre indicatif les premiers termes du développement en série de Fourier de cette fonction :

$$e(t) \approx \frac{U_0}{\pi} \left(\cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t - \frac{1}{7} \cos 7\omega t \right).$$



1. Rappeler le schéma du passe-bas du 1^{er} ordre et donner sa pulsation de coupure ω_c en fonction de R et C .
2. On considère le cas où $\omega_c \ll \omega$.
 - (a) Quel est l'effet du filtre sur chacune des composantes de Fourier de $e(t)$? En déduire le signal (forme, période, amplitude) $s(t)$ en sortie du filtre.
 - (b) Interpréter en termes de charge du condensateur.
3. On considère maintenant le cas $\omega_c \gg \omega$.
 - (a) Quel est l'effet du filtre sur les premières composantes de Fourier de $e(t)$? En déduire une approximation du signal (forme, période, amplitude) $s(t)$ en sortie de filtre.
 - (b) Interpréter en termes de charge du condensateur.

Correction de l'exercice 1

- La fonction de transfert est $\underline{H} = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$, avec $\omega_c = 1/(RC)$. Le diagramme de Bode est celui vu en cours.
- La bande passante à -3 dB est l'intervalle de pulsations $\omega \in [0, \omega_c]$. Exprimée en fréquence, on a $\Delta f = 1/(2\pi RC) = 5,3$ kHz.
- (a) Un pont diviseur de tension montre que la fonction de transfert devient :

$$\underline{H} = \frac{\frac{R_c}{1+jR_cC\omega}}{R + \frac{R_c}{1+jR_cC\omega}} = \frac{R_c}{R_c + R + jRR_cC\omega} = \frac{\frac{1}{1+R/R_c}}{1 + j\omega \frac{RC}{1+R/R_c}}$$

de la forme $\underline{H} = H_0/(1 + j\omega/\omega'_0)$, avec $H_0 = 1/(1 + R/R_c)$ et $\omega'_0 = (1 + R/R_c)\omega_0$: on a toujours un filtre du premier ordre. Le gain maximal est divisé par $1 + R/R_c$ et la bande passante augmentée du même facteur. Le produit du gain (exprimé en échelle linéaire) par la bande passante est inchangé.

- (b) Pour $R_c = 2R = 6$ k Ω , on obtient $G'_{\max}(dB) = -3,52$ dB et $\Delta f' = 7,96$ kHz.

Correction de l'exercice 2

- (a) On part du RC d'ordre 1 en pont dans lequel on remplace le résistor par une bobine d'inductance L et le condensateur par une résistance R . On vérifie que la pulsation de coupure est $\omega_c = R/L$, soit $f_c = R/(2\pi L)$. En bande passante, soit pour $f \ll f_c$, la bobine est équivalente à un fil et la tension d'entrée est appliquée au borne du résistor qui constitue donc l'impédance d'entrée. Les conditions imposent donc $R = 1$ k Ω et $R/(2\pi L) = 1,5$ kHz, soit $L = 1,1 \cdot 10^{-2}$ mH.
 - (b) Son diagramme de Bode est celui vu en cours.
2. Il suffit de prendre la tension aux bornes du résistor d'un dipôle RLC série. Son impédance est $jL\omega - j/(C\omega) + R$. Sa pulsation de résonance est $\omega_c = 1/\sqrt{LC}$ et sa finesse \mathcal{F} , égale au quotient de sa fréquence de résonance par sa bande passante $[f_1, f_2]$, vaut son facteur de qualité $Q = \sqrt{L/C}/R$. De plus la fréquence de résonance est équidistante en échelle log des deux fréquences de coupure (on peut également le vérifier sur les expressions de f_1 et f_2 vues en cours). On la détermine donc selon $\log f_c = (\log f_1 + \log f_2)/2$, soit $f_c = \sqrt{f_1 f_2}$, et on sait par ailleurs que $f_c = 1/(2\pi\sqrt{LC})$. On doit donc résoudre :

$$R = 1 \text{ k}\Omega \quad f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \sqrt{f_1 f_2} = 6,3 \cdot 10^2 \text{ Hz} \quad \frac{f_c}{f_2 - f_1} = 3,2 \cdot 10^{-2} = Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

On calcule alors :

$$L = 8,0 \text{ mH} \quad C = 7,9 \mu\text{F}.$$

Correction de l'exercice 3

- Pour $\omega \rightarrow 0$, la bobine est équivalente à un interrupteur fermée et la tension à ses bornes, égale à u_s , est nulle.
 - Pour $\omega \rightarrow \infty$, c'est maintenant le condensateur qui se comporte comme un interrupteur fermé. Pour les mêmes raisons, $u_s = 0$.

L'amplitude passera donc par un maximum pour une fréquence non nulle finie : on a vraisemblablement affaire à un passe-bande.

2. L'association parallèle du condensateur et de la bobine a pour impédance $\underline{Z}_e = jL\omega/(1 - LC\omega^2)$. Comme la sortie est ouverte, on utilise un pont diviseur de tension :

$$\frac{U_s}{U_e} = \frac{Z_e}{Z_e + R} = \frac{1}{1 + R \frac{1 - LC\omega^2}{jL\omega}} = \frac{1}{1 + jR \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)} = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)},$$

en utilisant la forme canonique du passe-bande du deuxième ordre. On identifie ensuite :

$$RC = \frac{Q}{\omega_0} \quad \frac{R}{L} = Q\omega_0 \rightarrow Q^2 = \frac{R^2 C}{L} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

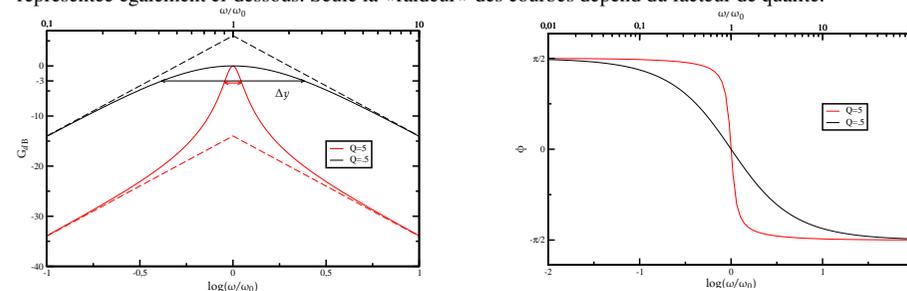
- (a) Sous la forme : $\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ(y - 1/y)}$, on a $G_{dB} = -10 \log(1 + Q^2(y - 1/y)^2)$ est maximal pour $y = 1$, soit $\omega = \omega_0$, où il vaut $G_{dB,0} = 0$. Le gain vaut alors $G_{dB,0} - 3$ pour $Q^2(y - 1/y)^2 = 1$, soit $y_{1,2} = \frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} = \frac{1}{2Q}(\sqrt{1 + 4Q^2} \pm 1)$, on retrouve bien sûr les calculs de la finesse de la résonance en intensité. La bande passante vaut $\omega_2 - \omega_1 = \omega_0/Q$.

- (b) On reprend l'expression du gain : $G_{dB} = -10 \log(1 + Q^2(y - 1/y)^2)$ dont les expressions asymptotiques

$$\text{soit, en utilisant } x = \log y : \begin{cases} x \rightarrow -\infty : G_{dB} \approx 20(x - \log Q) \\ x \rightarrow \infty : G_{dB} \approx -20(x + \log Q) \end{cases} \quad \text{ces deux asymptotes sont sécantes en}$$

$x = 1 \quad G_{dB} = -20 \log Q$. Contrairement aux circuits du premier ordre, leur position dépend d'un paramètre supplémentaire, le facteur de qualité. Les pentes en revanche sont toujours de ± 20 dB/décade. Ces courbes sont représentées sur la figure ci-dessous, où on a également représenté la bande passante $\Delta y = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0}$.

L'expression précédente de \underline{H} permet également d'exprimer la phase du filtre : $\varphi = -\arctan(Q(y - 1/y))$, représentée également ci-dessous. Seule la « raideur » des courbes dépend du facteur de qualité.



On a $G_{dB}(\alpha) = -10 \log(1 + Q^2(10^x - 10^{-x})^2)$, donc $G_{dB}(-x) = G_{dB}(x)$: la courbe est symétrique par rapport à l'axe $x = 0$. On montre de même que la courbe $\varphi(x)$ est symétrique par rapport au point $(x = 0; \varphi(0))$.

- (c) Le filtre sera d'autant plus sélectif que son facteur de qualité sera élevé. Contrairement au RLC série, il faudra dans ce cas avoir une grande valeur de la résistance R .

Correction de l'exercice 4

Le signal d'entrée est un signal triangle symétrique (fonction affine par morceaux), de période $T = 10$ ms. Il s'agit donc d'un signal de fréquence $f = \frac{1}{T} = 1,0 \cdot 10^2$ Hz.

Le signal de sortie se rapproche de la dérivée du signal d'entrée (fonction constante par morceaux). On cherche donc à réaliser une opération de dérivation du signal d'entrée. Pour cela, il suffit de réaliser un filtre passe-haut du premier ordre et de l'utiliser à basses fréquences. On souhaite donc en particulier que $f \ll f_c$, soit $T \gg \tau$.

Une réalisation simple d'un filtre passe-haut du premier ordre consiste à réaliser le montage en pont vu en cours. Pour $f \ll f_c$ sa fonction de transfert est approximativement $j\omega/\omega_c$: il réalise donc :

$$u_s(t) = \frac{1}{\omega_c} \frac{du_e}{dt}$$

On mesure donc ω_c comme le quotient de la pente de u_e et de la valeur constante de u_s sur une demi-période par exemple. On calcule alors :

$$\omega_c = \frac{\frac{du_e}{dt}}{u_s} = \frac{2,06\text{V}/5\text{ms}}{95\text{mV}} = 4,34 \text{ radian/s} \rightarrow f_c = 6,9 \cdot 10^2 \text{ Hz.}$$

Il suffit alors de choisir les valeurs de R et de C de telle sorte que $RC = 1/(\omega_c) = 2,3 \cdot 10^{-4}$ ms. La capture d'écran a été réalisée avec $R = 2,3\text{k}\Omega$ et $C = 100\text{nF}$.

⚠ Attention à ne surtout pas écrire que le quotient des amplitudes de la sortie et de l'entrée est égal au gain du filtre calculé à la fréquence de ces signaux. Ils ne sont en effet pas sinusoïdaux et ce gain est différent pour chacun de leurs harmoniques. En revanche, la relation mathématique de dérivation reste valable sur chaque harmonique et donc¹ sur le signal total.

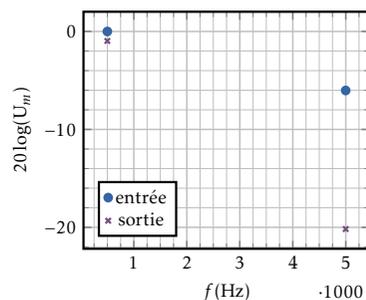
Correction de l'exercice 5

1. (a) Chacun des signaux est la somme d'une sinusoïde deux sinusoïdes d'amplitude et de fréquence différentes. On a :

$$u_e = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$u_s = B_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2).$$

Les deux fréquences ω_1 et ω_2 , communes aux deux signaux sont $f_1 = 500\text{Hz}$ et $f_2 = 5\text{kHz}$. Les amplitudes des composantes du signal d'entrée sont respectivement : $A_1 = 1\text{V}$ et $A_2 = 0,5\text{V}$. Celles du signal de sortie sont $B_1 = 0,9\text{V}$ et $B_2 = 1 \cdot 10^{-1}\text{V}$. On donne ci-contre l'allure du spectre de Fourier correspondant.



- (b) On observe que la composante de fréquence élevée est davantage atténuée : le filtre est donc un passe-bas. On peut vérifier que les composantes basse fréquences de l'entrée sont en phase. En revanche, la composante haute de fréquence de la sortie est en quadrature retard par rapport à l'entrée, comme il se doit pour un passe bas du premier ordre.

On utilise l'amplitude du signal à haute fréquence pour déterminer la fréquence de coupure. Pour un filtre du premier ordre, on a en effet $H = \omega_c/\omega = f_c/f$ en bande coupée. Ici le signal à 5kHz voit son amplitude multipliée par 1/5. En supposant sa fréquence suffisamment grande par rapport à f_c pour que l'approximation

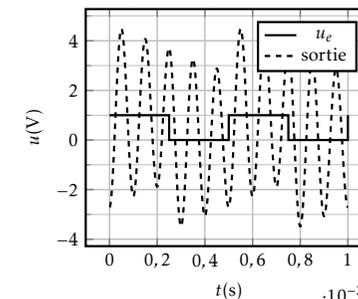
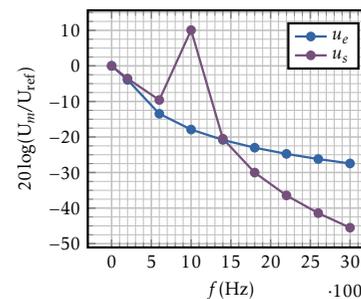
¹En admettant qu'on peut intervenir l'opération de dérivation et celle de sommation de série de Fourier, ce qui est correct pour un grand nombre de fonctions dont celles considérées et de toute façon exact si on ne considère qu'un nombre fini d'harmoniques.

précédente soit justifiée, on a $1/5 = f_c/f$, soit $f_c = 1,0\text{kHz}$. On vérifie a posteriori qu'on a bien $f = 5\text{kHz} \gg f_c = 1\text{kHz}$.

Remarquons qu'on peut également vérifier la valeur du signal basse fréquence en sortie. On a ici $f = 500\text{Hz} = f_c/2$, trop proche de f_c pour utiliser le modèle asymptotique. On calcule donc $H = 1/\sqrt{1+(f/f_c)^2} = 0,9$, en accord avec l'amplitude mesurée en sortie.

2. (a) Le signal est périodique de période $5 \cdot 10^{-3}\text{s}$, donc de fréquence fondamentale $f_1 = 200\text{Hz}$. On observe, outre la composante à fréquence nulle, des composantes de Fourier à 200Hz, 600Hz, 1kHz...distantes de 400Hz. En effet les harmoniques de rang pair (300Hz, 500Hz ...) sont nulles pour un créneau. La composante de fréquence nulle correspond à la valeur constante non nulle (0,5V) du signal.
- (b) Pour chacun des harmoniques, l'amplitude de sortie s'obtient en multipliant celle d'entrée par le gain ; en dB, on ajoute donc à la valeur d'entrée celle du gain du diagramme de Bode. On obtient le spectre représenté ci-dessous.

Le signal se compose principalement de la composante continue, du fondamental et du premier harmonique, non atténués mais surtout du deuxième harmonique dont l'amplitude devient environ $10^{14/20} \approx 5$ fois plus grande que le fondamental. On en déduit l'allure de l'évolution temporelle représentée ci-dessous.



Correction de l'exercice 6

1. (a) L'instant $t = 0$ réalise le maximum de $y(t)$. On constate également que pour $t = \tau/2$, on aura :

$$\frac{(2n+1)\pi t}{\tau} = \frac{\pi}{2} + n\pi \rightarrow (-1)^n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi t}{\tau}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = (-1)^{2n} = 1.$$

Tous les termes de la série sont donc positifs et maximaux en valeur absolue : c'est bien cette valeur qui réalise le maximum de $y(t)$: on peut choisir $t_0 = \tau/2$. On en déduit par ailleurs que, puisque $y(\tau/2) = 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

- (b) On vérifie de même que la période est 2τ .

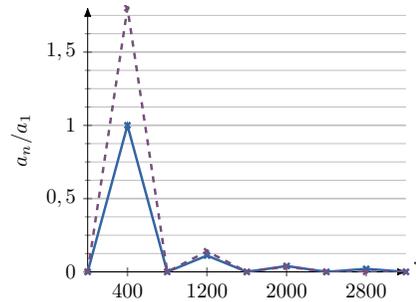
2. Pour chaque terme, on peut écrire :

$$\sin\left(\frac{(2n+1)\pi t}{\tau}\right) = \cos\left(\frac{(2n+1)\pi t}{\tau} - \frac{\pi}{2}\right).$$

On aura donc :

p pair : $a_p = 0$,

p impair $a_p = 8/(\pi^2 p^2)$ et $\pi_p = -\pi/2 + \frac{(p-1)\pi}{2}$.



3. (a) et (b) En posant $f_0 = 1,00\text{kHz}$ la fréquence de coupure du filtre, le module de sa fonction de transfert est $H = 2\sqrt{1 + (f/f_0)^2}$ et sa phase est $-\arctan(f/f_0)$. En notant respectivement a'_n et π'_n l'amplitude et la phase de la décomposition de Fourier du signal en sortie de filtre, on aura :

$f_1 = 400\text{Hz}$	$H = 1,8$	$a'_1/a_1 = 1,8$	$\pi'_1 = -\pi/2 - 0,38$
$f_3 = 1200\text{Hz}$	$H = 1,3$	$a'_3/a_1 = 1,4 \cdot 10^{-1}$	$\pi'_3 = +\pi/2 - 0,88$
$f_5 = 2000\text{Hz}$	$H = 1,0 \cdot 10^{-1}$	$a'_5/a_1 = 3,6 \cdot 10^{-2}$	$\pi'_5 = -\pi/2 - 1,1$

Le spectre correspondant est représenté en pointillés sur la figure précédente.

4. La cinquième harmonique a pour amplitude $a_5 = a_1/5^2$. Pour l'extraire on peut par exemple choisir un passe-bande d'ordre 2, de fréquence de coupure $f_0 = 5v$, suffisamment fin pour qu'il filtre efficacement les harmoniques de rang 1, 3, 7. Le gain en amplitude d'un tel filtre est $H(f/f_0) = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2(f/f_0 - f_0/f)^2}}$. On calcule les amplitudes a'_1, a'_3 et a'_7 pour $f_0 = 5v$:

$p = 1$	$f = v = f_0/5$	$a'_1/a'_5 = H(1/5)a_1/(H(1)a_5) = 25/\sqrt{1+Q^2(1/5-5)^2}$ $\approx 25/\sqrt{1+Q^2 \times 23}$;
$p = 3$	$f = 3v = 3f_0/5$	$a'_3/a'_5 = H(3/5)a_3/(H(1)a_5) = 25/(9\sqrt{1+Q^2(3/5-5/3)^2})$ $\approx 2,8/(9\sqrt{1+Q^2 \times 1,14})$;
$p = 7$	$f = 7v = 7f_0/5$	$a'_7/a'_5 = H(7/5)a_7/(H(1)a_5) = 25/(49\sqrt{1+Q^2(7/5-5/7)^2})$ $\approx 0,51/(49\sqrt{1+Q^2 \times 0,47})$.

La pureté du signal filtré attendue impose que $a'_p/a'_5 \leq 1\%$ pour $p \neq 5$. On calcule les facteurs de qualité correspondant :

$$a'_1/a'_5 \leq 1\% \rightarrow Q_1 \geq 5,2 \cdot 10^2 \quad a'_3/a'_5 \leq 1\% \rightarrow Q_3 \geq 2,6 \cdot 10^2 \quad a'_7/a'_5 \leq 1\% \rightarrow Q_7 \geq 74.$$

Le critère le plus contraignant est celui sur le fondamental, on doit donc choisir $Q \geq 5.2e2$, difficile à réaliser avec un simple RLC passe-bande.

Correction de l'exercice 7

- Les fréquences voisines de 40kHz sont transmises (avec une atténuation cependant) alors que celles supérieures ou inférieures sont bloquées : il s'agit d'un filtre passe-bande
- Sa fréquence caractéristique est $f_c = 40\text{kHz}$. La fréquence f_c est atténuée d'un facteur $17/3 \approx 5,6$. Les fréquences de coupure sont donc celle pour lequel le gain est plus faible d'un facteur $sqrt2$ et vaut donc $1/(5,6 * sqrt2) \approx 0,12$. On détermine que ce sont approximativement $f_1 = 37\text{kHz}$ et $f_2 = 43\text{kHz}$ pour lesquelles le gain vaut environ $(0,01/0,1) = 0,1$. La finesse est alors $f_c/(f_2 - f_1) \approx 6$. Pour un passe-bande d'ordre 2, cette finesse est égale à Q : on a donc environ $Q = 6$.
- Comme on l'a vu en TP, le signal électrique produit par un GBF est transformé en signal acoustique par l'émetteur (quartz piézoélectrique) qui se propage dans l'air et est retransformé en signal électrique par le récepteur (un autre quartz piézoélectrique). La propagation dans l'air est vraisemblablement indépendant de la fréquence sur la gamme considérée et c'est plutôt lors des conversions par l'émetteur et le récepteur que le filtrage est réalisé.

Correction de l'exercice 8

On se place tout d'abord en RSE. On désigne par Z_1 l'impédance de l'association série R - C et par Z_2 celle de l'association parallèle. On obtient alors à l'aide d'un diviseur de tension $\frac{U_{sm}}{U_{em}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$.

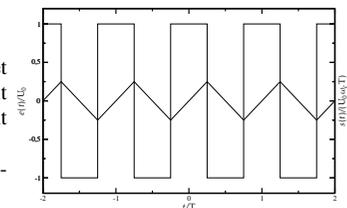
$$\text{avec : } Z_1 = \frac{1 + jRC\omega}{jC\omega} \quad Z_2 = \frac{R}{1 + jRC\omega} \quad \text{on obtient : } \frac{U_{sm}}{U_{em}} = \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2}.$$

Pour l'équation différentielle, on utilise $j\omega \rightarrow \frac{d}{dt}$ pour obtenir : $RC \frac{du_e(t)}{dt} = u_s(t) + 3RC \frac{du_s(t)}{dt} + (RC)^2 \frac{d^2 u_s(t)}{dt^2}$.

Correction de l'exercice 9

- La pulsation de coupure est $\omega_c = 1/(RC)$.
- (a) Toutes les composantes de Fourier sont des sinusoides à des pulsations $\omega_i = (2i + 1)\omega \gg \omega_c$. On est donc dans le régime intégrateur où $H \approx 1/(jRC\omega)$. Chaque composante de Fourier est intégrée donc $e(t)$ est intégrée : $s(t) = s(0) + \omega_c \int_{t=0}^t e(t) dt$. La sortie est la somme d'une fonction constante $s(0)$ et de la primitive de $e(t)$ s'annulant en $t = 0$, le signal triangulaire de période même période T : $\frac{s_T(t)}{U_0} = \begin{cases} \omega_c t & \text{pour } t \in [-T/4; T/4] \\ -\omega_c t & \text{pour } t \in [T/4; 3T/4] \end{cases}$.

Dans le cas $s(0) = 0$, on obtient un triangle de période T et d'amplitude $\omega_c T/4$, d'autant plus faible que T est faible, soit $\omega = 2\pi/T$ élevée : c'est en effet dans la zone où il est coupant que le filtre a un comportement intégrateur. Ces courbes sont représentées sur la figure ci-contre où on a représenté e/U_0 et $s/(U_0\omega_c T)$ en fonction de t/T .

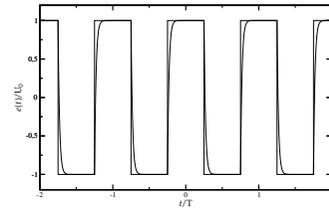


signal créneau intégré en signal triangulaire de même période pour $\omega \gg \omega_c$.

- (b) La condition $\omega \gg \omega_c$ signifie que la période du signal $e(t)$ est très faible devant la constante du circuit RC . Ce dernier voyant pendant chaque demi-période un signal constant d'amplitude U_0 , on n'observe que le tout début de la charge d'un condensateur. Les portions rectilignes correspondent aux approximations linéaire de $U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$ et $-U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$ pour $t \ll 1/(RC)$.
3. (a) Les premières composantes de Fourier, pour lesquelles on a toujours $\omega_i = (2i+1)\omega \ll \omega_c$ ne sont pas filtrées et sont transmises à l'identique. En négligeant celles d'ordre supérieur qui sont d'autant plus atténuées que i est élevé, le signal est transmis quasiment sans aucun filtrage : $s(t) \simeq e(t)$.

La constante de temps du circuit RC est maintenant très petite devant T et la charge du condensateur a

- (b) le temps de s'effectuer durant chaque demi-période comme représenté sur la figure ci-contre, pour $\omega_c = 50\omega$.



signal crête transmis quasiment à l'identique pour $\omega_c \gg \omega$.